

专题二 三角函数与平面向量

第1讲 三角函数的图象与性质

研究课初探

1.研究课的构思

高三复习课怎么上？复习课缺少新授课的新奇，也没有习题课的畅爽，复习课容易陷入做题、讲题、做题的枯燥循环中。复习课还可以如何创新才能增强趣味、激发学生的学习热情，这是每一个高三数学教师的思考与追求。

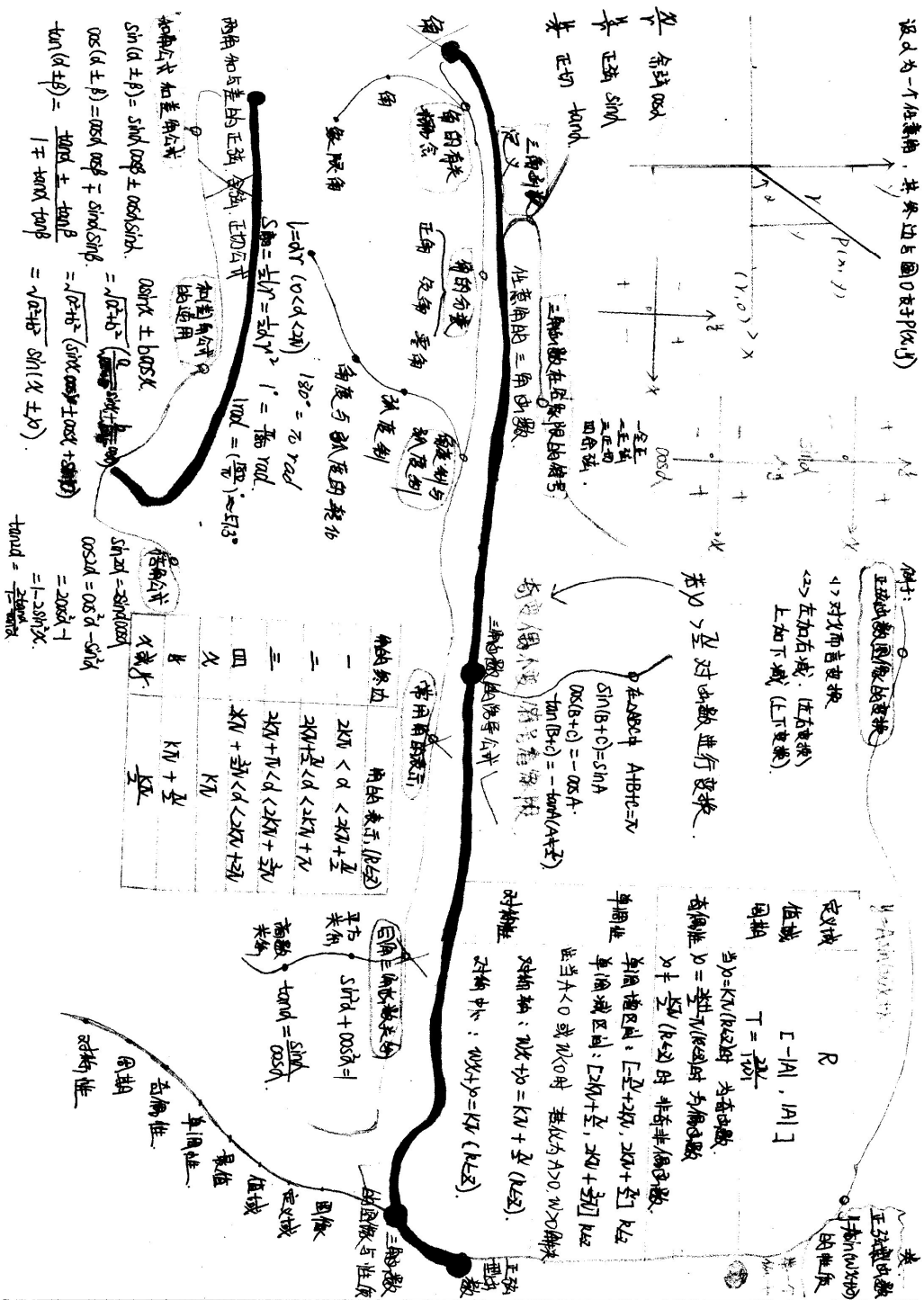
自己也想进行一些探索，也想为距离高考 50 天的追梦学子留下一片数学学习的记忆，于是，便产生了一个想法：老师负责构建课堂框架，学生以小组为单位负责完成框架中每一个项目的研究，然后小组代表用时 6 分钟在课堂上集中共享展示。为同学们进行了简单的叙述，便立即进行了项目承包研究的任务分配。

项目	承包小组	研究要求
知识内容	董林培小组	将本模块的知识进行梳理，做到结构化、系统化，带领同学们回归课本；
解题心得	万琦玥小组	总结三角函数图象与性质部分的解题思考，将心得和重要结论呈现出来；
高考分析	李想小组；耿鲁俊小组；郝兴盛小组；李伟涛小组；	借助近5年高考的考查形式，对18高考趋势做出判断，并给大家合理化建议；
学案解读	毛东旭小组；任荣康小组；	将学案的题目按照知识进行分类，对“难题”重点评价，进行难度突破；
拓展延伸	孙建栋小组；	立足本模块内容，借助拓展题目进行深度考查，为大家呈现题目和作法；

2.学生研究成果

记得刚刚告诉学生课堂构建的思路后，学生各个迅速的找出相关的学习资料，脸上洋溢着兴奋和激动。看着他们投入的表情，心中坚信他们一定可以在深度体验的学习中，自主建构优化认知结构。

（一）知识导图



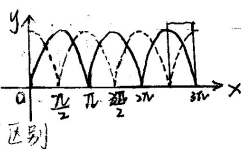
(二) 解题心得

1. 周期性

$$\textcircled{1} f(x) = |\sin x| + |\cos x| \quad T = \frac{\pi}{2}$$

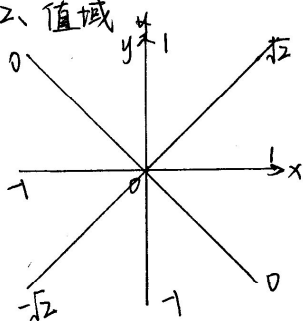
$$\textcircled{2} f(x) = 1 + |\sin 2x| \quad T = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{3} f(x) = \sin^2 x \quad T = \pi$$



$$\textcircled{4} f(x) = |\sin x + \cos x| \quad T = \pi$$

2. 值域



$$y = \sin x + \cos x$$

① 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A + \cos A = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \triangle ABC$ 为钝角三角形

② 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A + \cos A = \frac{6}{5}$

$\Rightarrow \angle A$ 为锐角

PS: 若已知或可证出 $\angle A$ 为最大角, 则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形

同理可联想 $\sin A - \cos A$

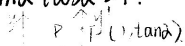
3. 奇偶性

① $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 为偶函数 $\Rightarrow \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

② $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 为偶函数 $\Rightarrow \varphi = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

4. 大小比较, 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\textcircled{1} \sin \alpha + \cos \alpha > 1 \quad \textcircled{2} \sin \alpha < \alpha < \tan \alpha \quad \textcircled{3} \sin |\sin \alpha| < \sin \alpha < \alpha$$



① 两边之和大于第三边

$$\textcircled{2} \sin \alpha = PN, \quad \alpha = PA, \quad \tan \alpha = AT$$

$$\textcircled{3} \sin \alpha \in (0, 1) \therefore \sin |\sin \alpha| < \sin \alpha$$

5. 导数中 已知 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow \checkmark$; $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow \times$

$\therefore$ 可能存在 $f'(x) = 0$ 的情况, $f(x)$ 恒为 0.

$\therefore$ 我们说 $f'(x) > 0$ 在任意区间内不恒为 0 或 $f'(x) > 0$ 的解为有限个.

但是! $f(x) = \sin x + x$ 为特殊情况 其 $f(x) = \cos x + 1$ 中 $f(x) = 0$ 有无数个值.

个可能出在选择性中判真假

$$b. \text{ 已知 } \begin{cases} \sin \alpha + \cos \beta = m \\ \cos \alpha + \sin \beta = n \end{cases} \Rightarrow \sin(\alpha + \beta)$$

$$\textcircled{1}^2 + \textcircled{2}^2 \Rightarrow 2 + 2 \sin \alpha \cos \beta + 2 \cos \alpha \sin \beta = m^2 + n^2$$

$$\text{同理联想 } \begin{cases} \sin \alpha + \cos \beta = m \\ \cos \alpha - \sin \beta = n \end{cases} \Rightarrow \sin(\alpha - \beta)$$

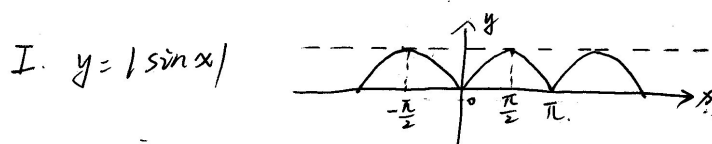
$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = m \\ \cos \alpha \pm \sin \beta = n \end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha \mp \beta)$$

(三) 高考分析 1

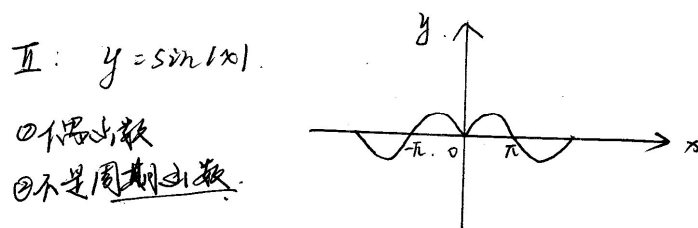
高考题预测:

由于有部分知识相对来说较为简单,且多为图象题.

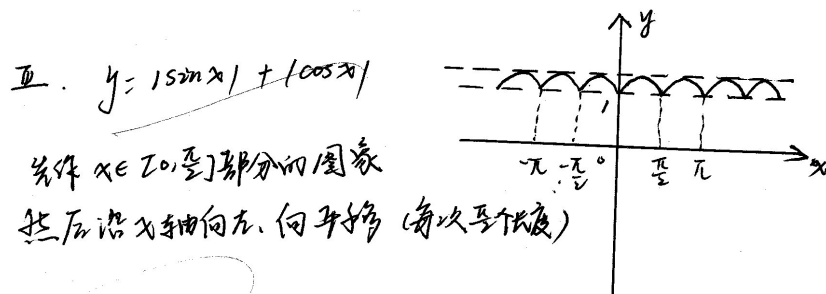
所以预测会对基本图象进行变换.下面介绍几种函数便于理解.



- ① 定义域 $\mathbb{R}$ ② 值域 $[0, 1]$ ③ 偶函数 ④ $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}] \quad k \in \mathbb{Z} \nearrow$
 $[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi] \quad k \in \mathbb{Z} \searrow$



- ① 偶函数
 ② 不是周期函数.



先作 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 部分的图象
 然后沿 x 轴向左、向右平移 (每次 $\frac{\pi}{2}$ 长度)

① 周期函数 $T = \frac{\pi}{2}$.

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})| + |\cos(x + \frac{\pi}{2})| = |\cos x| + |-\sin x| = |\sin x| + |\cos x| = f(x)$$

② 值域 $[1, \sqrt{2}]$

③ 在 $[\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{k\pi}{2}] \searrow$
 $[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}] \nearrow$

2017年 全国 I、II、III (多以选择题呈现)

I: 类型: 图象变换 平移之后求解析式

曲线 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

C_1 经过何种变换得到 C_2 ?

$\cos x \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\substack{\text{C}_1 \text{ 各点的横坐标} \\ \text{缩短到原来的} \frac{1}{2} \text{ 倍}}} \cos 2x \xrightarrow[\text{单位长度}]{\text{向右平移 } \frac{\pi}{6} \text{ 个}} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

考查知识 1. 图象变换

① 先相位变换后周期变换

$y = \sin x \xrightarrow[\varphi \text{ 个单位长度}]{\text{向左/右平移}} y = \sin(x \pm \varphi) \xrightarrow[\text{来的如倍} (w < 0, 1) \text{ 伸长}, w > 1 \text{ 缩短}]{\substack{\text{纵坐标不变图象上各点变为原} \\ \text{横坐标}}} y = \sin(wx + \varphi)$

② 先周期变换后相位变换

$y = \sin x \xrightarrow[\substack{\text{变为原来的} w \text{ 倍} \\ w < 0, 1) \text{ 伸长}, w > 1 \text{ 缩短}}]{\substack{\text{图象上各点横坐标}}} y = \sin wx \xrightarrow[\text{单位长度}]{\text{向左/右平移 } \frac{\varphi}{w} \text{ 个}} y = \sin[w(x + \frac{\varphi}{w})] = \sin(wx + \varphi)$

个人认为①种方法易掌握

2. 诱导公式 $\cos x \rightarrow \sin x$ 函数类型发生变换 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ 应用

II: 题目较简单 无参考价值

III: 未涉及

(三) 高考分析 2

九组

例二 2015.1 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 部分图象如图所示.
则 $f(x)$ 的单调减区间为.

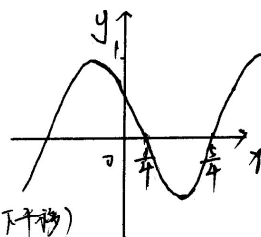
注意: ① 对图象点的找寻.

② 对条件的转化

例如: 相邻两零点距离 (无上下平移)

在某区间上单调, 关于某点, 某轴对称.

③ 数形结合.



例三. 2011 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x - \frac{3}{4}$ ($x \in [0, \pi]$)
的最大值是 ____

注意: ① 定义域 ② 换元前后自变量范围

例四. 2016 Ⅱ 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{2}{3}$, 则 $\sin 2\alpha =$

$$\sin 2\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \alpha) - 1$$

注意: ① 公式的应用 ② 高级公式, 二级结论

③ 积化和差的相对性.

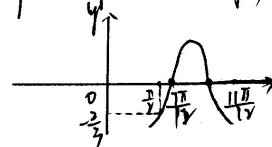
④ 整体的观点.

$$\textcircled{5} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

三 高考预测:

1. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示. 且 $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{3}$ 则 $f(0) =$

A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$



2. 若 $\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{10}{3}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$,

则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) + 2\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha$ 的值为 ____.

九组

难度：中偏易，技巧性：中 备考建议：仔细审题，能简便则简便，
不贪不燥，精准解决。
力争见到题就有思路。

一、主要考点：1. 平移伸缩变换。

(变换前后的奇偶性、点对称、轴对称、极值点、

单调区间、最小正周期)

2. 利用图像或已知确定三角函数式。

形如： $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$

$A, B \rightarrow$ 极值点确认。

$\omega \rightarrow$ 周期 (通过图像可能给出的是 $\frac{T}{2}, \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}$ 等)

$\varphi \rightarrow$ 与 x 轴、 y 轴交点或特殊点。

3. 利用三角函数求具体函数单调区间等。

(包含了化简问题)

对各种公式的灵活运用，

更在做对情况下如何更快更准解决大问题。

二、全国卷命题：

例一：2016 年。

函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图像可由函数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$
的图像至少向右平移 _____ 个单位长度得到。

注意：① 谁变或谁，不要弄反。

② 审题：至少向右平移。

(三) 高考分析 3

高考题.

1. 根据函数图像确定解析式.

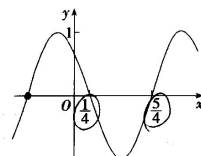
$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi).$$

$$\frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{代点 (max, min, 平衡点)}.$$

考查年份: 08, 09, 15 (I), (隐藏), 16 (I).

例题:

15. (I). (8) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为



A. $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

B. $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

C. $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

D. $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

↑
由图得 T, ω .
代点 (求) φ .

2. 三角函数图像的性质和应用.

☆ 警惕当 $\omega < 0$ 时的情况!

$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$. 最值. 周期. 单调区间. 对称中心. 对称轴.

考查年份: 11, 12, 13 (I), 15 (II), 16 (I), 17 (II), (III).

例题:

17. (II). (14) 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x - \frac{3}{4}$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 的最大值是 _____.

化同名.
换元.

△
注意范围.

13. (I). (15) 当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ 取得最大值, 则 $\cos \theta =$ _____.

化同名.

借助辅助角公式!

1. 三角函数的图象变换.

$$y = \sin x \leftrightarrow y' = A \sin(\omega x + \varphi).$$

★ 可能出现 $\cos \leftrightarrow \sin$.

考查年份: 16. (II), (III), 17. (II).

例题:

预测: 已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi) - 2\cos(\omega x + \varphi)$, $10 < \varphi < 20$ 的图象关于直线 $x=1$

对称, 则 $\sin 2\varphi = ?$

六组.

(三) 高考分析 4

三角函数图像（高考预测部分）

展示用讲义



中国教育考试网
WWW.CEEDU.COM

高考大纲中对三角函数图像的要求

(八) 基本初等函数 II (三角函数)

1. 任意角的概念、弧度制

- (1) 了解任意角的概念.
- (2) 了解弧度制的概念, 能进行弧度与角度的互化.

2. 三角函数

- (1) 理解任意角三角函数(正弦、余弦、正切)的定义.

- (2) 能利用单位圆中的三角函数线推导出 $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ 的正弦、余弦、正切的诱导公式.

能画出 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 的图像, 了解三角函数的周期性.

- (3) 理解正弦函数、余弦函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上的性质(如单调性、最大值和最小值以及与 x 轴的交点等), 理解正切函数在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内的单调性.

- (4) 理解同角三角函数的基本关系式:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

6

- (5) 了解函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的物理意义; 能画出 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像, 了解参数 A , ω , φ 对函数图像变化的影响.

- (6) 了解三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型, 会用三角函数解决一些简单实际问题.

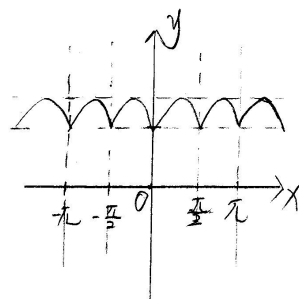
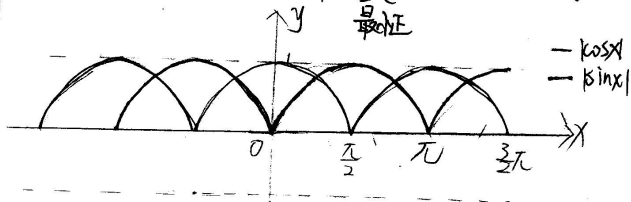
猜想

三角函数与绝对值函数结合

[创新类]

已知 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ ，其周期为_____。

最值



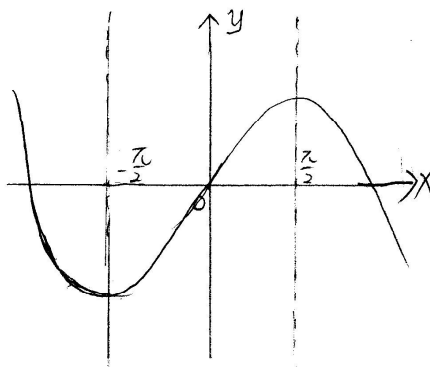
猜想

难一点的周期考察

[三角大杂烩型]

$$f(x) = 3\sin \omega x \cdot \cos \omega x + \sqrt{3} \cos^2 \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\omega > 0)$$

$f(x)$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 上为增函数，则 ω 最大值为？



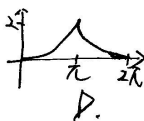
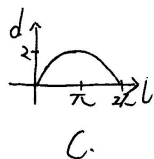
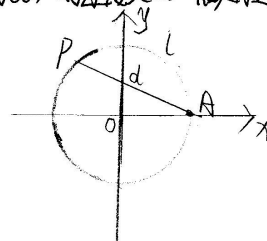
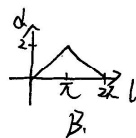
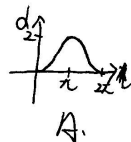
猜想一

三角函数与圆相结合

[动态变化型]

题目的出现有周期性: 2010 $\longrightarrow$ 2014 $\longrightarrow$ 2018?

如图, 设点A是单位圆上的定点, 动点P从A出发在圆上按逆时针方向转一周, 点P的旋转过弧AP的长为 l , 弦AP的长为 d , 则函数 $d=f(l)$ 的图像大致为



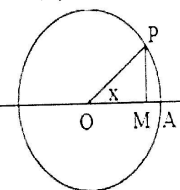
2014 全国I

三角函数与圆相结合

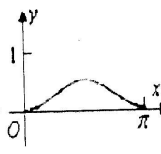
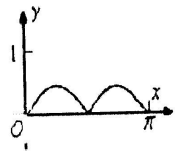
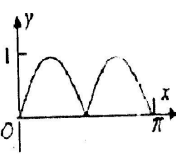
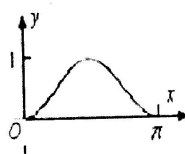
题目的出现有周期性: 2010年 $\longrightarrow$ 2014年 $\longrightarrow$ 2018年?

(6) 如图, 圆O的半径为1, A是圆上的定点, P是圆上的动点,

角x的始边为射线OA, 终边为射线OP, 过点P作直线OA的垂线, 垂足为M. 将点M到直线OP的距离表示成x的函数



数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 的图像大致为



$$f(x) = 3\sin\omega x \cdot \cos\omega x + \sqrt{3}\cos^2\omega x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\sin 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2\omega x - 1)$$

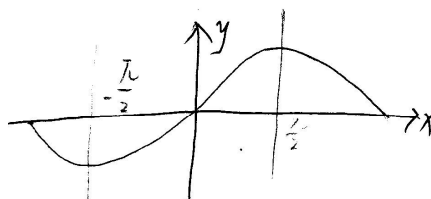
$$\Rightarrow \sqrt{3}\sin(2\omega x + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{令 } t = 2\omega x + \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{3}\sin t$$

由题知 $t \in [-\frac{2}{3}\pi\omega + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}]$ 时 $f(x) \uparrow$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}\pi\omega + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \omega \in (0, 1]$$



感谢三班的各位(·ω·)◇

一组与三组联合制作



(四) 学案解读 1

高三数学活页作业

班级: _____ 姓名: _____ 时间: _____

一. 图象变换: 2, 3, 7, 10(2)

二. 函数图象的性质

① 求T: 1, 9(1)

② 增减区间: 10, 11

③ 最值: 5, 6, 9(2), 11(1)

④ 对称性: 4, 8, 11(2)

三. 化三一 (大题必做)

1, 6, 11: 三角恒等变换 (三一形式)、周期 ($T = \frac{2\pi}{\omega}$)

2, 3: 图象的平移、伸缩

7, 9, 10

4: 三角函数特殊值的应用

5, 8: 周期、图象应用、导数

8: 图象 (增减区间、对称轴)

11: 对称轴的性质

每天一小步, 人生一大步!

(四) 学案解读 2

四组.

1. 求值域

① 换元法.

eg. 求函数 $y = \frac{\sin x + \cos x + \frac{t^2-1}{2}}{\sqrt{2} \sin(x+\frac{\pi}{4})}$ 的值域. $\Rightarrow y = t + \frac{t^2-1}{2} \quad (t \in \dots)$

② 分离变量法.

eg. 求 $y = \frac{3\cos x + 1}{\cos x + 2}$ 的值域.

$$y = \frac{3(\cos x + 2) - 5}{\cos x + 2} = 3 - \frac{5}{\cos x + 2}$$

2. 利用周期性求值.

eg. 已知函数 $f(x) = \cos \frac{2\pi}{3}x$. 求 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2016)$ 的值.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3. \quad f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 0$$

3. 三角函数与其他知识交汇

eg. 已知关于 x 的方程 $(t+1)\cos x - t\sin x = t+2$ 在 $(0, \pi)$ 上有实根, 则实数 t 的最大值是 -1 .

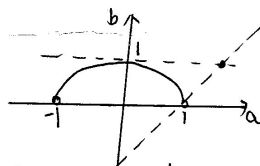
析: $-\frac{1}{t} = \frac{1 - \cos x \sin x}{2 - \cos x} = 1 - \frac{1 - \sin x}{2 - \cos x}$

令 $P(\cos x, \sin x)$ $A(2, 1)$.

$k_{PA} = \frac{1 - \sin x}{2 - \cos x} \quad x \in (0, \pi) \Rightarrow -1 < \cos x < 1, \quad 0 < \sin x \leq 1.$

令 $a = \cos x, b = \sin x$. 如图 $0 \leq k_{PA} < 1$

$0 < 1 - \frac{1 - \sin x}{2 - \cos x} \leq 1$ 即 $0 < -\frac{1}{t} \leq 1$ 故 $t \leq -1$.



(五) 拓展延伸

已知 $f_1(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$, 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得 $f_2(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$, $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{13}{6}\pi]$

将 $f_2(x)$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到 $f_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$, $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{7}{3}\pi]$

... $f_{n+1}(x)$

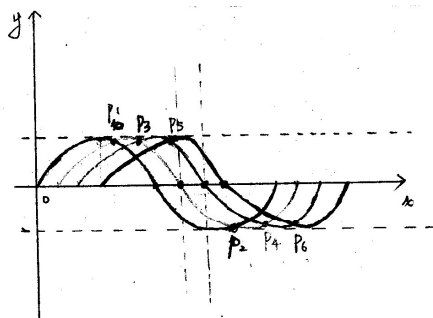
设 $f_2(x)$ 与 $f_1(x)$ 交于 p_1, p_2 两点, $f_3(x)$ 与 $f_2(x)$ 交于 p_3, p_4 两点.

$f_{n+1}(x)$ 与 $f_n(x)$ 交于 p_{2n+1}, p_{2n+2} 两点.

x_i 为 p_i 的横坐标 ~~求 $\cos(x_1 + x_2 + \dots + x_{16})$~~

~~求 $\cos(x_2 + \dots + x_{16})$~~

求 $\cos(x_2 + \dots + x_{95})$



$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2(\pi + \frac{\pi}{6}) \\ x_4 + x_5 = 2(\pi + 2 \cdot \frac{\pi}{6}) \\ \vdots \\ x_{2n-2} + x_{2n-1} = 2[\pi + (n-1) \cdot \frac{\pi}{6}] \end{cases}$$

$$\text{则 } x_2 + \dots + x_{2n-1} = 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6} [1 + 2 + \dots + (n-1)]$$

$$= 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6} \frac{(n-1)(1+n-1)}{2}$$

$$= 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6} \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{则 } \cos(x_2 + \dots + x_{95}) = \cos(\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{\pi}{6}) = \cos(4 \times 8 \pi) = \cos 0 = 1$$

3.课后反思总结

从课堂中学生表现能看出，学生准备的较为充分，学生从知识内容、解题心得、高考分析、学案解读、拓展延伸各个的纬度都进行了深入的思考与研究，高三学生的初步的研究意识得到了很好的呈现。从他们的讲解姿态和听课学生的神态中能感受到他们在准备的过程中，丰富数学活动的经验，加深数学内容的理解，强化数学应用的能力，提升核心素养的水平。

另一方面，也有不少需要改进的地方。比如，学生展示的时间大都超时。学生愿意进行展示，可以在后续得教学活动中更多的为学生创造机会和。有的学生的素材投影不清晰，在以后的类似研究课中，可以提前给学生规范的书写纸，以保证投影更加的完整清晰。

学生进行某种程度的研究会投入不少的时间，但研究过程带给学生的数学表达能力的锤炼和数学理解的深层触及是颇有价值的。我们不可能每节课都这样来设计，但这种课型的周期性尝试还是要做的，因为在不断的尝试中，数学特点给学生的学科浸染、理性思维对学生的思维冲击、数学学习为学生留下的成长记忆才有了更广阔播种地域。